KARAKTERISTIK *WARRANT* DALAM MENEMUKAN *COUNTER EXAMPLE*

Christina Laamena

Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pattimura, Ambon
Email: christinmath18@gmail.com

Abstrak

Warrant adalah dasar pikir yang digunakan seseorang dalam argumentasinya untuk menghasilkan klaim. Argumentasi merupakan bentuk komunikasi matematika yang digunakan untuk meyakinkan diri sendiri dan orang lain tentang kebenaran pernyataan yang telah dibuat. Argumentasi akan dibahas berdasarkan komponen argumentasi Toulmin yang terdiri dari data, *warrant*, *claim* dan *rebuttal*. Penelitian ini bertujuan mengeksplorasi karakteristik *warrant* dalam argumentasi matematis ketika siswa berusaha menghasilkan *counter example*. Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif untuk mengarakteristikan warrant dalam argumentasi mahasiswa ketika menghasilkan *counter example*. Selama menyelesaikan masalah, peneliti merekam, mengobservasi dan mencatat semua perilaku termasuk think aloud siswa. Siswa kemudian diwawancarai secara individu untuk menjelaskan proses berpikirnya ketika mengonstruksi bukti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa warrant induktif dapat menghasilkan klaim yang benar. Warrant dapat dikelompokan menjadi warrant yang bersifat lemah dan warrant yang bersifat kuat.

Kata kunci: *warrant*, argumentasi, *counter example*

Abstract

Warrant is the basis of thought used someone ito generate claims. Argumentation is mathematical form of communication used to convince ourselves and others about the truth of the statements that have been made. Arguments will be discussed based on components consisting of a Toulmin argument data, warrant, claim and rebuttal. This study aims to explore the characteristics of the warrant in a mathematical argument when students attempted to produce a counter example. This research is a descriptive qualitative research for characterize warrant in the students ' argument when generating a counter example. For resolve the problem, the researchers record, observing and noting all the behaviors include think aloud of students. Students are then interviewed individually to explain his thinking process when mengonstruksi evidence. The results showed that the warrant can generate inductive claims are true. Warrant can be grouped into a warrant that is weak and warrant that is strong.

Keywords*: warrant, argumentation, counter example*

ISSN : 2597 – 4696

PENDAHULUAN

Bukti adalah pusat ilmu matematika dan menjadi bidang utama penelitian pendidikan matematika (Tikva, 2009). Bukti dan mengonstruksi bukti adalah dasar untuk melakukan, memahami serta mengomunikasikan pengetahuan matematika (Stylianides, 2007), itulah sebabnya pembuktian mendapat peningkatan perhatian di tahun-tahun terakhir (Stylianides, 2007 serta Hanna & de Villiers 2012). Berbagai penelitian tentang proses mengonstruksi bukti telah banyak dilakukan. Hasil-hasil penelitian ini menunjukkan bahwa dalam mengonstruksi bukti matematis seseorang tidak selamanya mengikuti aturan deduktif, namun seringkali terdapat banyak aspek induktif seperti bukti empiris, kasus-kasus khusus atau grafik (Tymoczko, 1985; Feferman, 2000; and Arzarello, 2007, Inglish et al 2007, Burton 2004) yang digunakan untuk memahami proposisi yang akan dibuktikan serta untuk menemukan hubungan antar proposisi (Arzarello, Paola dan Sabena, 2009). Argumentasi akan terjadi selama proses mengonstruksi bukti untuk mengorganisir beberapa justifikasi (argumen) yang telah dihasilkan (Boero, Garuti dan Mariotti,1999) dan menghasilkan konklusi yang valid.

Argumentasi dan Pembuktian

Argumentasi dan pembuktian merupakan salah satu bagian penting dalam pembelajaran matematika. *Principles and Standards for School Mathematics* (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000) menegaskan bahwa salah satu bagian dalam memahami matematika adalah mengembangkan argumen dan bukti matematika kemudian mengevaluasinya. Argumentasi berperan penting dalam pembuktian matematika (Douek, 2009), walaupun terdapat perbedaan antara pembuktian dan argumentasi biasa (*ordinary argumentation*) (Duval, 2007). Argumentasi juga penting dalam menghasilkan konjektur serta mengonstruksi buktinya.

Argumentasi matematika selalu dihubungkan dengan pembuktian, untuk menunjukkan kebenaran kesimpulan yang dibuat (Aberdein, 2008). Pablo, Ramos dan Inglis (2009) mengemukakan tiga aktivitas yang saling berhubungan dalam engonstruksi bukti dan argumentasi yaitu (1) membaca argumen yang diberikan: memahami dan mengevaluasi argumen berdasarkan kriteria yang diberikan (2) mengonstruksi argumen baru: mengeksplorasi masalah, membuat konjektur dan mengestimasi kebenarannya serta menjustifikasi pernyataan agar menjadi benar, dan (3) mempresentasekan argumen yang diperoleh: meyakinkan pendengar atau pembaca tentang kesimpulannya, menjelaskan mengapa kesimpulan tersebut benar serta mendemonstrasikan validitas argumen

Bell (dalam De Villers,1990) menjelaskan lima tujuan utama pembuktian dan argumentasi, yaitu (1) memverifikasi: menentukan kebenaran pernyataan, (2) menjelaskan: memberikan pengertian mengapa pernyataan benar, (3) sistematisasi: menyusun hasil dalam system deduktif, (4) penemuan: menemukan hasil baru dan (5) komunikasi: menyebarkan pengetahuan matematika. Pedemonte (2007) menjelaskan tiga fungsi karakteristik umum dalam argumentasi dan pembuktian matematis, yaitu: (1) sebagai justifikasi rasional, (2) berfungsi untuk meyakinkan, (3) ditujukan untuk banyak pendengar (*universal audience*), yaitu komunitas matematik, kelas, guru dan teman diskusinya.

Argumentasi Toulmin

Toulmin (1958) mengemukakan suatu pendekatan untuk menganalisis argumentasi berawal dari logika formal. Dia kurang tertarik dengan validitas argumen logis dan lebih kuatir tentang konten dan struktur semantic. Inilah cara menganalisis argumentasi yang dikenal sebagai "informal logic" dengan tujuan untuk menekankan perbedaannya dari logika formal. Skema Toulmin terdiri dari 6 komponen, yaitu yaitu Claim/Conclusion (C), Data (D), Warrant (W), Backing (B), Modal Qualifier (Q) dan Rebuttal (R).

Claim (C) yakni pernyataan atau kesimpulan yang dibuat berdasarkan data, *Data* (D) adalah 'fondasi' argumen didasarkan, fakta-fakta yang relevan dengan klaim. *Warrant* (W) seperti 'jembatan' yang menghubungkan data dan klaim dan menjadi dasar pikir atau alasan yang digunakan untuk menghasilkan kesimpulan. *Warrant* dapat berbentuk: rumus, definisi, aksioma atau teorema maupun membuat analogi, gambar atau diagram dan grafik. Warrant diperkuat oleh *backing* (B) yang merupakan bukti-bukti lanjut atau alasan tambahan yang dibutuhkan. *Rebuttal* (R) adalah pernyataan yang membantah kesimpulan yang dihasilkan jika kondisi tidak dipenuhi.

Inglis, Mejia-Ramos dan Simpson (2007) mengemukakan bahwa dalam memvalidasi sebuah pernyataan matematik, seseorang dapat menggunakan tiga jenis warrant yakni: warrant induktif yaitu warrant yang didasarkan pada interpretasi konsep matematika secara konkrit berupa representase visual seperti gambar, grafik atau representase ilustratif lainnya termasuk contoh-contoh; warrant struktural intuitif yaitu penggunaan pengamatan, percobaan, atau beberapa jenis struktur mental, baik itu visual atau lainnya yang meyakinkan mereka tentang kesimpulan; serta warrant deduktif yaitu penggunan sifat, aturan dan teorema dalam proses deduktif. Hasil penelitian Ubuz, Dincer dan Bulbul (2013) menunjukkan bahwa ketika mengonstruksi definisi (pada argumentasi kolektif) siswa menggunakan warrant deduktif dan warrant referensi.

Argumentasi Toulmin telah digunakan oleh banyak peneliti pendidikan matematika. Krummhaeur (1995) dan Pedemonte (2002&2007) mereduksi *backing*, *rebuttal* dan *modal qualifier*. Knipping (2003, 2007 & 2008); Ubuz, Dincer dan Bubul (2012 & 2013) serta Chen dan Wang (2016) mereduksi *rebuttal* dan *modal qualifier*. Penelitian ini akan berfokus pada warrant untuk menghasilkan kesimpulan valid.

Berdasarkan penjelasan di atas, makalah ini bertujuan mengeksplorasi skema untuk menjelaskan struktur argumentasi mahasiswa selama mengonstruksi bukti, mendemonstrasikan salah satu bagian dari skema yaitu warrant dan mengarakteristiknya berdasarkan hubungannya dengan komponen-komponen lainnya. Penelitian ini penting karena kebenaran suatu klaim bergantung pada warrant.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif untuk mengarakteristikan warrant dalam argumentasi mahasiswa ketika mengonstruksi bukti matematis. Masalah diberikan kepada 52 mahasiswa matematika dan pendidikan matematika Universitas Pattimura Ambon untuk diselesaikan secara individu. Selama menyelesaikan masalah, peneliti merekam, mengobservasi dan mencatat semua perilaku termasuk think aloud siswa. Siswa kemudian diwawancarai secara individu untuk menjelaskan proses berpikirnya ketika mengonstruksi bukti.

Peneliti memberikan masalah aljabar yakni pernyataan matematika yang bernilai salah (*disproved*) sehingga mahasiswa diharapkan dapat menentukan *counter example* yang dalam model Toulmin disebut *rebuttal*.

Diberikan fungsi $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $f(x) = x^2$ dan $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $g(x) = x$. Selidiki apakah $f(x) \geq g(x)$ untuk semua x bilangan Real?

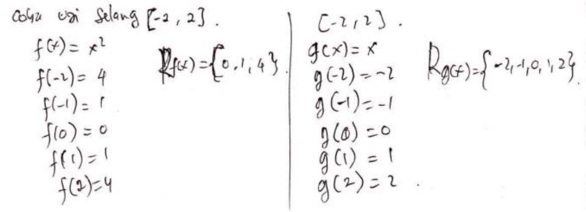
 ISSN : 2597 – 4696

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

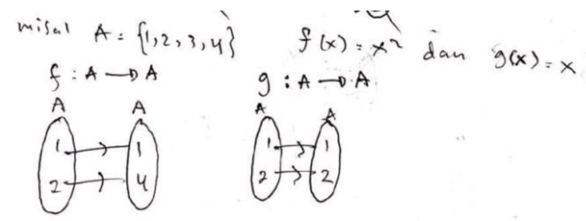
Peneliti akan mengarakteristikan warrant berdasarkan jenisnya yaitu: warrant deduktif, induktif dan structural intuitif (Inglish, 2007). Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga warrant ini ada yang bersifat lemah dan ada yang bersifat kuat. Istilah warrant lemah digunakan untuk alasan yang tidak sempurna, atau kurang tepat ketika seseorang membuat kesimpulan berdasarkan data. Berikut ini, peneliti akan mendeskripsikan karakteristik warrant disertai contoh-contohnya

Warrant yang bersifat lemah

Siswa menggunakan berbagai jenis warrant untuk menyelidiki kebenaran pernyataan yang diberikan. Warrant induktif yang digunakan siswa terdiri dari: contoh-contoh bilangan real, grafik fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$ serta diagram panah. Di antara ketiga warrant induktif ini, yang bersifat lemah adalah contoh-contoh bilangan dan diagram panah. Contoh warrant induktif disajikan pada Gambar 1 (1a,1b). Pada Gambar 1 terlihat jelas bahwa siswa mengambil beberapa contoh bilangan real dan membuat diagram panah dan menyimpulkan bahwa pernyataan bernilai benar. Warrant induktif ini bersifat lemah, karena tidak semua bilangan real dicantumkan pada contoh yang dipilih sehingga menghasilkan claim yang salah.



Gambar 1a. Contoh Hasil Kerja Mahasiswa dengan warrant induktif contoh yang bersifat lemah



Gambar 1b. Contoh Hasil Kerja Mahasiswa dengan warrant induktif diagram yang bersifat lemah

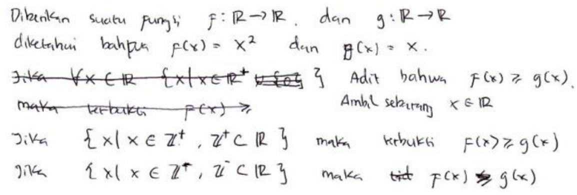
Siswa juga menggunakan warrant structural intuitif dengan mengatakan bahwa "kuadrat suatu bilangan selalu lebih besar atau sama dengan dirinya sendiri". Penggunaan kata 'suatu bilangan' merujuk pada bilangan real namun pernyataan ini bersifat lemah. Siswa memperhatikan fakta-fakta masalah tentang bilangan real, namun dengan cepat mengatakan sifat bilangan yang bukan bilangan real, tetapi bilangan bulat. Warrant structural intuitif ini menghasilkan klaim yang salah juga.

Warrant deduktif digunakan siswa dengan mengelompokan bilangan real menjadi beberapa bagian, seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Pengelompokan Bilangan Real oleh Siswa

Kategori Bilangan Real	Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3
Kategori pertama (a)	$x = \frac{a}{b}$, $a < b$ (1a)	$x < 0$ (2a)	$x \in \mathbb{Z}^+$ (3a)
Kategori Kedua (b)	$x = \frac{a}{b}$, $a > b$ (1b)	$x > 0$ (2b)	$x \in \mathbb{Z}^-$ (3b)
Kategori Ketiga (c)	$x = \frac{a}{b}$, $a = 0$ dan $b \neq 0$ (1c)	$x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$ (2c)	$x = \frac{1}{a}$, $x \in \mathbb{R}$ (3c)

Warrant deduktif lemah terjadi pada: kelompok 1 dan 2 karena tidak tidak terdapat kelompok $x = \frac{a}{b}$ dengan $a = b$, pada kelompok 2b tidak terdapat untuk $x = 0$, pada kelompok 3a tidak terdapat $x = 1$. Hal ini menghasilkan beberapa klaim benar dengan alasan yang lemah. Namun, karena pernyataan yang diberikan bernilai salah, maka ketika siswa menemukan sebuah contoh penyangkal (counter example) maka cukup untuk menyimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan bernilai salah. Gambar 2, memberikan salah satu contoh jawaban siswa

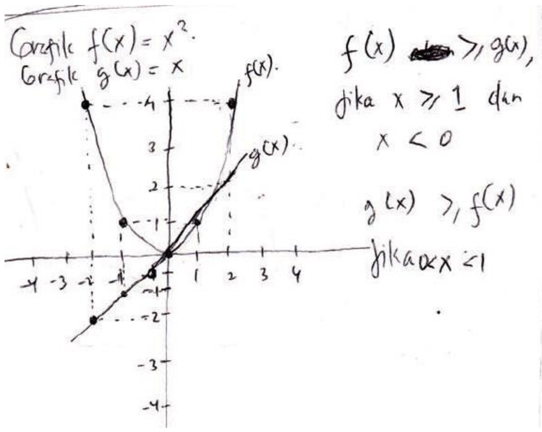


Gambar 2. Contoh Warrant deduktif yang bersifat lemah

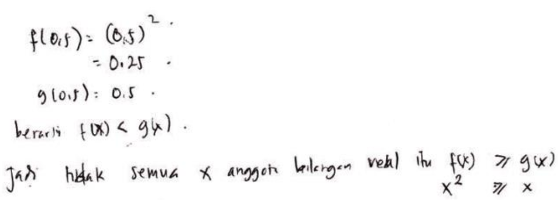
Warrant yang bersifat Kuat

Warrant yang bersifat kuat dapat berasal dari warrant induktif maupun warrant deduktif. Warrant induktif yang kuat terdiri dari: contoh-contoh bilangan real dan grafik fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$. Contoh warrant induktif kuat disajikan pada Gambar 3 (3a,3b). Pada Gambar 3 terlihat jelas bahwa siswa mengambil beberapa contoh bilangan real yang mewakili semua himpunan bagian dari bilangan real dan menemukan $x = \frac{1}{2}$ yang tidak memenuhi ketaksamaan yang diberikan. Pada tahap ini, siswa menemukan contoh penyangkal dan menyimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan bernilai salah. Grafik fungsi kuadrat dan linier juga digunakan sebagai warrant induktif dengan menggambar grafik fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$. Berdasarkan grafik, siswa menemukan bahwa pernyataan bernilai salah karena untuk $0 < x < 1$ berlaku $x^2 < x$ yang berarti $f(x) < g(x)$.

 ISSN : 2597 – 4696



Gambar 3a. Warrant induktif grafik yang kuat



Gambar 3b. Warrant induktif contoh yang kuat

Warrant yang kuat juga berasal dari warrant deduktif. Setelah mengelompokan bilangan real, siswa menggunakan definisi-definisi yang tepat diperoleh claim bahwa pernyataan bernilai salah

KESIMPULAN DAN SARAN

Warrant deduktif sebagai bentuk pembuktian matematika tidak menjamin bahwa akan menghasilkan claim yang benar. Untuk pernyataan yang bernilai salah, seseorang cukup menunjukkan sebuah contoh penyangkal maka akan dihasilkan pernyataan yang bernilai benar. Counterexample, dapat ditemukan dengan berbagai cara termasuk warrant induktif. Pada penelitian ini, terbukti bahwa penggunaan grafik, contoh dan warrant induktif lainnya dapat menolong menghasilkan counter example dan menghasilkan claim yang benar. Warrant (baik deduktif maupun induktif) dapat bersifat kuat maupun lemah. Warrant yang bersifat kuat menghasilkan klaim benar sedangkan warrant yang bersifat lemah cenderung menghasilkan klaim pertama yang salah dan harus diperbaiki kembali. Warrant induktif dapat menghasilkan counter example jika bersifat kuat.

REFERENSI

Aberdein, A. (2008). Mathematics and Argumentation. *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands*

Alcock, L. (2009). Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntatic Approaches. *Procceding ICMI Study 19, 2009*

Arzarello,F., Paola D., Sabena, C. (2009). Proving In Early Calculus. *Proceeding ICMI 2009*

Arzarello,F., Paola D., Sabena, C. (2009). Logical And Semiotic Levels In Argumentation. *Proceeding ICMI 2009*

Boero, P., Garuti, R., Mariotti M. A. (1999). Some Dynamic Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjectures» *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX, vol. 2, (pp. 121 – 128), Valencia*.

ISSN : 2597 – 4696

Bromley, D.B. (1986). *The case-study method in psychology and related disclipines*. Chichester. John Wiey & Sons

Burton, L. (2004). Mathematicians as Enquirers. *Learning about Learning Mathematics*. Dordecht, Kluwer

Chen, Y.T., dan Wang, J. H. (2016). Analyzing with Posner's Conceptual Change Model and Toulmin's Model of Argumentative Demonstration in Senior High School Students' Mathematic Learning. *International Journal of Information and Education Technology, Vol. 6, No. 6, June 2016*

de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras* 24: 17-24

Douek, N. (1999). Some Remark About Argumentation and Mathematical Proof and Their Educational Implication. *European Research in Mathematics Education I*: Group 1

Duval. (2007). Struktur Argumentasi. *Educational Studies in Mathematic*, 22, 233-261

Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics* **1** (1), 4-11

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*. Dordrecht, Netherlands: Springer.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*, 40:487–500. *DOI 10.1007/s11858-008-0104-1*

Hitchcock D., & Verheij, B. (2006). *Arguing on the Toulmin Model: New Essays in Argument analysis and Evaluation* (p.1-23), Springer.

Hoffkamp, A., Schnieder, J. & Paravicini, W. (2011). *Mathematical Enculturation – Argumentation And Proof At The Transition From School To University*

Inglis, M., Ramos M. & Simpson, (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, Ch. (2002). Proof and proving processes: Teaching Geometry in France and Germany. In H.-G. Weigand (Ed.), Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries. *Selected Papers From the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern 1999* (pp. 44–54). Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Knipping, Ch. (2003). Argumentation Structures in Classroom Proving Situations. *European Research in Mathematics Education III*

Krummheuer, G. (1995). *The Ethnography of Argumentation*. In: P. Cobb und H. Bauersfeld (Ed.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, 229-269

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*

Pablo, J., Ramos, M., and Inglis,M. (2008). What are the argumentative activities associated with proof? Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 28(2) June 2008*

Pedemonte, B. (2002). Relation Between Argumentation and Proof in Mathematics: Cognitive Unity or Break? *In: Proceedings of the 2nd Conference of the European Society* *for Research in Mathematics Education*, 2, Marienbad, 2001.

Pedemonte, B. (2003). What Kind of Proof can be Constructed Following an Abductive Argumentation? *European Research in Mathematics Education III*

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed. *Educ Stud Math* (2007) 66:23–41

Rav, Y. (1999). Why do We Prove Thorems? *Philosophia Mathematica*, 7(3), 5-41

Selden, A. & Selden, J. (2013). Persistence and Self-Efficacy in Proving. Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,304-307*

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321

Tetens, H. (2010). *Argumentieren lehren. Eine kleine Fallstudie*. In Meyer, K. (Ed.), *Texte zur Didaktik der Philosophie* (198-214). Stuttgart: Reclam.

Tikva, J.B. (2009). Old Meta-Discursive Rules Die Hard. *Procceding ICMI Study 19, 2009*

Toulmin, S.E. (1958). *The Uses of Argument*, Cambridge: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ubuz, B., Dincer, S., & Bulbul, A. (2012). Argumentation in undergraduate math courses: A study on proof generation. Tso, T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4, 163-170.

Ubuz B., Dincer S.,& Bülbül A. (2013). Argumentation in Undergraduate Math Courses: A Study on Definition Construction. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 313-320. Kiel, Germany: PME.

Viholainen, A. (2009). *The View Of Mathematics And Argumentation*

Vincent, J., Chick, H., dan McCrae, B. (2005). Argumentation Profile Charts As Tools For Analysing Students' Argumentations. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 281-288*. Melbourne: PME

ISSN : 2597 – 4696